CUADERNILLO 4

Nueva carpeta de Matemática VI

Ruth Schaposchnik (coord.)
Carlos Abdala - Luis Garaventa - Claudio Turano

Alumno/a

Curso

4. Análisis matemático II 3
Revisión inicial 4
Aplicaciones de la derivada al estudio de una función 5
Crecimiento y decrecimiento 5
Derivadas sucesivas. Concavidad 8
Problemas de optimización 12
El concepto de primitiva 15
Primitivas de funciones elementales 15
Algunas propiedades de las primitivas 15
La integral definida y el cálculo de áreas. Regla de Barrow 16
En el mundo real 19
La producción más adecuada 19
La velocidad que menos perjudica 20
Más actividades 21
Autoevaluación 22
Actividades integradoras 23

AIQUE

Este CUADERNILLO 4 pertenece a la Nueva carpeta de Matemática VI.
No puede venderse por separado.

DIRECCIÓN EDITORIAL
Teresita Valdettaro

COORDINACIÓN DEL ÁREA DE MATEMÁTICA
Ruth Schaposchnik

EDICIÓN
Nora Legorburu

CORRECCIÓN
Cecilia Biagioli (coordinación)
Inés Gugliotella

SUPERVISIÓN GRÁFICA
Verónica Uher
Victoria Maier

COORDINACIÓN GRÁFICA
Leda Rensin - Silvina Roveda

DIAGRAMACIÓN
Daniel Balado
Silvana López

ILUSTRACIONES
Diego Molina
Estudio DOBLEVUELO (aperturas)

FOTOGRAFÍA
Archivo Aique

PRODUCCIÓN INDUSTRIAL
Pablo Sibione

Agradecemos la colaboración de Gustavo Delupí
y de Claudia García en el control de las respuestas.

© Copyright Aique Grupo Editor S. A.
Valentín Gómez 3530 (C1191AAP)
Ciudad de Buenos Aires
Teléfono y fax: 4867-7000
e-mail: editorial@aique.com.ar - www.aique.com.ar

Hecho el depósito que previene la Ley 11.723
LIBRO DE EDICIÓN ARGENTINA
ISBN 978-987-06-0078-7
Primera edición

La reproducción total o parcial de este material en cualquier forma que sea, idéntica o modificada y por cualquier medio o procedimiento, sea mecánico, electrónico, informático, magnético y sobre cualquier tipo de soporte, no autorizada por los editores, viola derechos reservados, es ilegal y constituye un delito.

Turano, Claudio
Nueva carpeta de matemática VI / Claudio Turano ; Carlos Abdala ; Luis Garaventa ; coordinado por Ruth Schaposchnik - 1a ed. - Buenos Aires : Aique Grupo Editor, 2007.
176 p. ; 28x20 cm.

ISBN 978-987-06-0078-7

1. Matemática. I. Abdala, Carlos II. Garaventa, Luis III. Schaposchnik, Ruth, coord. IV. Título
CDD 372.7

Esta edición se terminó de imprimir en febrero de 2007 en Latingráfica. Rocamora 4161, Ciudad de Buenos Aires.

4 ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Si bien las nociones de derivada, integral, límite y otros conceptos fundamentales del cálculo o análisis matemático son formalmente complejas, su aplicación resulta sumamente útil para la resolución de situaciones concretas que pueden plantearse en términos muy simples, como el cálculo del área de una figura plana o el problema de lograr que cierta magnitud sea lo más grande o lo más chica posible.

Esto es que esta rama de la Matemática ha tenido, desde sus comienzos, aplicaciones concretas y muy diversas en disciplinas tan diversas como la Física, la Medicina y la Economía.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

REVISIÓN INICIAL

1 Para cada una de las funciones de la Lista B, indiquen cuál de las funciones de la Lista A es su derivada.

Lista A

a) e^2

b) $\frac{1}{x}$

c) x^5

d) e^{2x}

e) $2\pi x$

f) $4 \cos x$

g) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

h) 1

i) $3 \operatorname{sen} x$

j) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

k) $-\frac{1}{x^2}$

l) 0

Lista B

I. $\frac{1}{6}x^6 + 8$

II. $0{,}5e^{2x}$

III. $1 - 3 \cos x$

IV. $x - 20$

V. $2\sqrt{x} + 3$

VI. $7e^0$

VII. πx^2

VIII. $\frac{x^6}{6}$

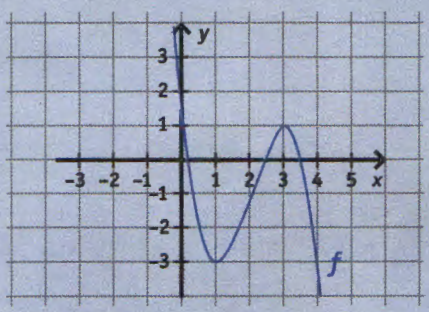
IX. $\frac{1}{x}$

X. $\ln x + 8$

XI. x

XII. $4 \operatorname{sen} x$

2 Observen el gráfico de la función *f*.
Indiquen intervalos de crecimiento y decrecimiento, conjuntos de positividad y negatividad, y coordenadas de los puntos extremos.



3 Consideren los puntos A = (0; 12) B = (10; 7) y C = (2; 1).

a) Representen los puntos en un gráfico cartesiano y tracen las rectas que determinan.

b) Calculen el área del triángulo que quedó determinado.

c) Escriban las inecuaciones que determinan la figura.

4 Consideren el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} y \leq \frac{5}{3}x + \frac{7}{3} \\ y \geq -x + 5 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

a) Representen graficamente el sistema.

b) Encuentren analíticamente los vértices de la figura que observan.

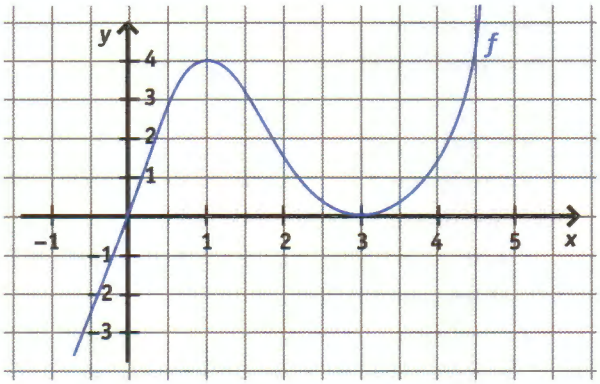
c) Calculen el área de la figura que quedó determinada.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Aplicaciones de la derivada al estudio de una función

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos

5 La gráfica corresponde a la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.



a) Indiquen las coordenadas de los puntos máximo y mínimo locales.

.....

.....

.....

b) Identifiquen los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

.....

.....

c) Elijan tres puntos de la gráfica en cada intervalo determinado en **b)** y tracen, en la gráfica, las rectas tangentes a la curva en esos puntos.

d) ¿Cuál es el signo de las pendientes de las tangentes en los intervalos de crecimiento?

.....

e) ¿Cuál es el signo de las pendientes de las tangentes en los intervalos de decrecimiento?

.....

f) Tracen las rectas tangentes a la curva en los puntos máximo y mínimo.

g) ¿Cuál es la pendiente de cada recta? .....

Para leer y recordar

- **Una función *crece* en un intervalo si y sólo si *la derivada de la función es positiva* en todos los puntos del intervalo.**
- **Una función *decrece* en un intervalo si y sólo si *la derivada de la función es negativa* en todos los puntos del intervalo.**
- **Si una función alcanza *un máximo o mínimo local* en un punto de su dominio, *la derivada de la función en ese punto es nula o no existe.***
- **Al analizar funciones razonamos de la siguiente manera:**
  - **Si $f'(x) > 0$ en $(a; b) \Rightarrow$ la función f es *creciente en* $(a; b)$.**
  - **Si $f'(x) < 0$ en $(a; b) \Rightarrow$ la función f es *decreciente en* $(a; b)$.**
  - **Si $f'(a) = 0 \Rightarrow$ la función f tiene un *punto crítico* en $x = a$. Esto quiere decir que es posible que en este punto la función tenga un máximo local o un mínimo local.**

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Para observar

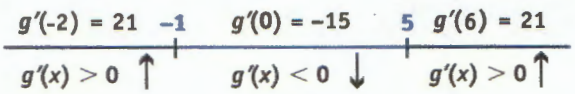
Para analizar el crecimiento o el decrecimiento de una función continua, procedemos como en el siguiente ejemplo.

En la función $g(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 40$

- Hallamos $g'(x)$.
- Resolvemos $g'(x) = 0$ para hallar los puntos críticos.
- Realizamos un esquema tomando como base los puntos críticos.
- Calculamos $g'(x)$ en un punto de cada intervalo y a partir del signo de la derivada determinamos si la función crece o decrece.

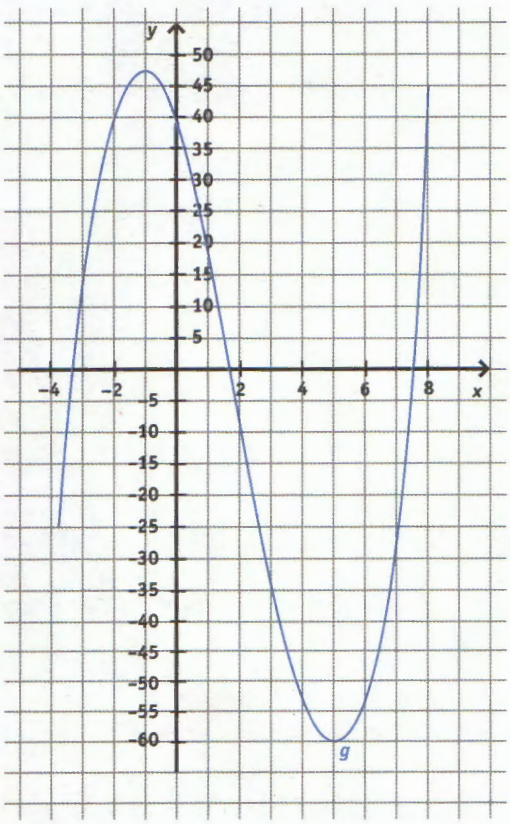
$g'(x) = 3x^2 - 12x - 15$

$g'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x - 15 = 0 \Rightarrow \underbrace{x_1 = -1 \text{ y } x_2 = 5}_{\text{puntos críticos}}$



Los datos obtenidos se pueden volcar en una tabla y sirven para organizar el gráfico.

	Intervalo $(-\infty; -1)$	Punto crítico $x_1 = -1$	Intervalo $(-1; 5)$	Punto crítico $x_2 = 5$	Intervalo $(5; +\infty)$
Signo de $f'(x)$	+	máximo local	−	mínimo local	+
$f(x)$	crece ↑		decrece ↓		crece ↑



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

6 Dada la función $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$.

a) Calculen $f'(x)$.

.....

b) Resuelvan $f'(x) = 0$ y obtengan, si existen, puntos críticos.

.....

c) Determinen los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función siguiendo el ejemplo de la página anterior.

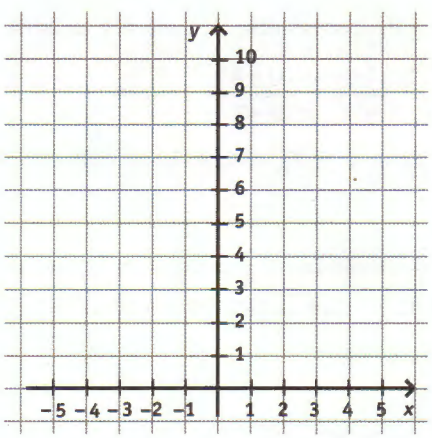
.....

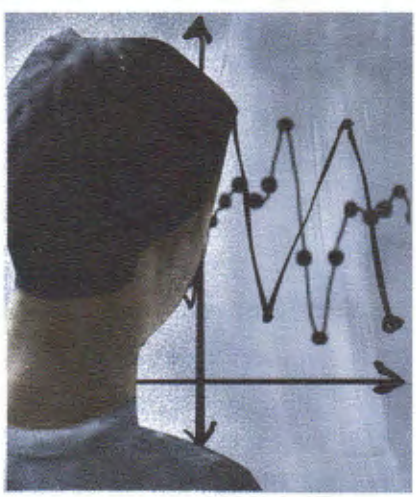
d) Determinen si los puntos críticos encontrados son máximos locales, mínimos locales o ninguna de las dos cosas, e incorporen en la tabla siguiente los resultados obtenidos.

.....

	Intervalo	Punto crítico	Intervalo	Punto crítico	Intervalo	Punto crítico	Intervalo
	(.....; .....)	$x =$	(.....; .....)	$x =$	(.....; .....)	$x =$	(.....; .....)
Signo de $f'(x)$	–	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$f(x)$	decrece	.....	.....	máximo	.....	.....	.....

e) Con los resultados obtenidos realicen un gráfico aproximado de la función.





7 Analicen el crecimiento y el decrecimiento de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 - 12x + 8$

b) $f(x) = x^2 + 10x$

c) $f(x) = -3x^2 + 1$

d) $f(x) = 3x^3 - x$

e) $f(x) = x^4 + 4x + 8$

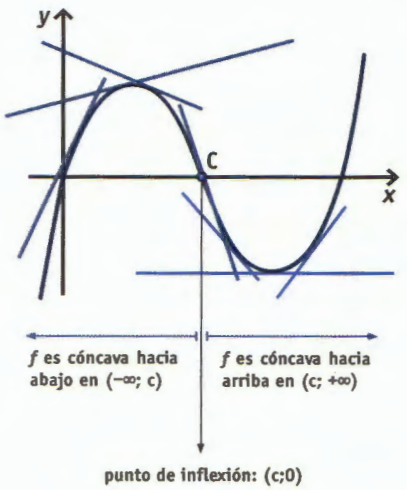
f) $f(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 2$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Derivadas sucesivas. Concavidad

Para leer y recordar

- Una función es *cóncava hacia arriba* en un intervalo cuando su gráfica está por encima de la recta tangente a la función en todos los puntos de ese intervalo.
- Una función es *cóncava hacia abajo* en un intervalo cuando su gráfica está por debajo de la recta tangente a la función en todos los puntos de ese intervalo.
- Una función tiene un *punto de inflexión* en un punto $x = x_0$ cuando la recta tangente a la función en ese punto (si es que existe) atraviesa a la gráfica. En el punto de inflexión, la curva cambia su concavidad.

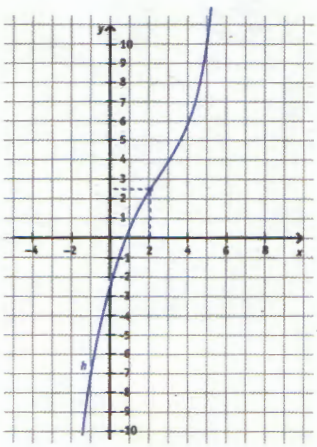


- Para analizar la concavidad de una curva continua, debemos considerar el signo de la *derivada segunda*, $f''(x)$, que es la derivada de la derivada primera.

Si $f''(x) > 0$, entonces, la curva es *cóncava hacia arriba.*
Si $f''(x) < 0$, entonces, la curva es *cóncava hacia abajo.*
Si $f''(x) = 0$, entonces, hay un posible *punto de inflexión.*

Ejemplo:

- Para analizar la concavidad de la función $h(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x - 2$, procedemos de la siguiente manera:
- Hallamos $h'(x)$: $h'(x) = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow h''(x) = 2x - 4$
- Buscamos los posibles puntos de inflexión:
  $h''(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$
- Construimos un esquema similar al que utilizamos para el análisis de los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, pero con la derivada segunda.



$h''(x) < 0 \frown$ | $h''(x) > 0 \smile$

$h''(1) = -2$ | 2 | $h''(3) = 2$

Entonces, $h(x)$ es cóncava hacia abajo en $(-\infty; 2)$, cóncava hacia arriba en $(2; +\infty)$ y $(2; \frac{8}{3})$ es punto de inflexión.

8 Hallen los intervalos de concavidad de las siguientes funciones, y en aquellas que presenten puntos de inflexión, hallen la ecuación de la recta tangente que pase por esos puntos.

a) $f(x) = (x + 5)^4$ b) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 8$ c) $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 5$ d) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 12}$

9 Tachen la opción incorrecta en cada caso.

Cuando una función $f(x)$ alcanza un máximo local en un punto de abscisa x_0, la recta tangente en ese punto queda { *por abajo* / *por arriba* } de la gráfica de la función.

Cuando una función $f(x)$ alcanza un mínimo local en un punto de abscisa x_0, la recta tangente en ese punto queda { *por abajo* / *por arriba* } de la gráfica de la función.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

10 Las representaciones gráficas siguientes corresponden a la función $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2x^2$ y a sus primeras dos derivadas $f'(x)$ y $f''(x)$.

a) Observen los gráficos y completen las frases.

I. Los puntos de contacto de $f(x)$ son (.....; .....) y (.....; .....) con el eje x, y (.....; .....) con el eje y.

II. $f'(x)$ se anula en los puntos de abscisa .....

III. $f''(x)$ se anula en el punto de abscisa .....

b) Encuentren analíticamente las coordenadas de los siguientes puntos:

I. Los puntos de contacto de $f(x)$ con los ejes

.....

II. Los puntos críticos y su clasificación

.....

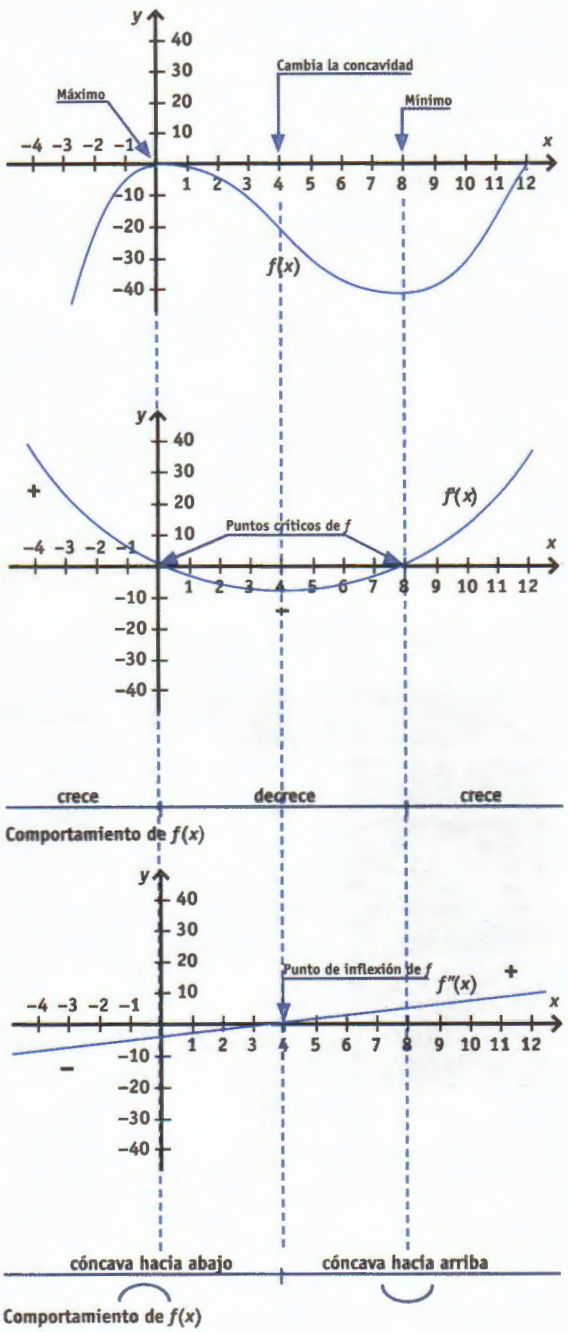
III. El punto de inflexión .....

.....

c) Completeen las frases.

I. $f''(0) < 0$; por lo tanto, $f(x)$ tiene un ..... en $f(0) = 0$ y $f(x)$ tiene un mínimo en $f(8) = -\frac{128}{3}$ porque .....

II. La concavidad de $f(x)$ cambia en $x = 4$ porque $f''(x) < 0$ en el intervalo ..... y $f''(x) > 0$ en el intervalo .....



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

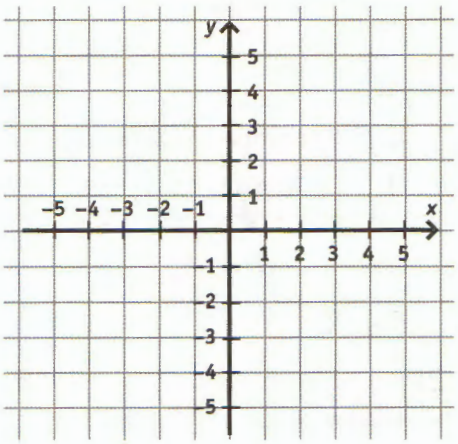
11 Consideren la función $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.

a) Realicen su estudio completo y luego represéntenla gráficamente.

Dominio de $f(x)$ = ...

Intersecciones { con el eje x ..... ; con el eje y ..... }

Asíntotas { verticales ..... ; horizontales ..... ; oblicuas ..... }



Análisis de crecimiento y de decrecimiento. .....

.....

Análisis de concavidad.

.....

b) Vuelquen en la tabla las conclusiones obtenidas.

	(.....; .....)	.....	(.....; .....)	.....	(.....; .....)	.....	(.....; .....)
Signo de $f(x)$	.....		.....		.....		.....
Signo de $f'(x)$	.....		.....	Asíntota	.....		.....
Crecimiento o decrecimiento	.....	.....	.....	vertical	.....	.....	.....
Signo de $f''(x)$	.....		.....		.....		.....
Curvatura	.....		.....		.....		.....

12 Analicen los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y la concavidad de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 1 - 6x - x^2$

b) $f(x) = (5 + x)^3$

c) $f(x) = (x + 2) \cdot (x^2 + 7x + 1)$

d) $f(x) = \frac{4}{(x + 1)^2}$

e) $f(x) = x^2 \cdot (x + 1)$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

13 Consideren la función $f(x) = (x-1)^3 \cdot (x+3)$. Identifiquen sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como sus conjuntos de positividad y negatividad.

14 Hagan un estudio completo de la función $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ y grafíquenla.

15 Representen gráficamente en forma aproximada las siguientes funciones, calculando previamente el dominio, las asíntotas, el crecimiento y el decrecimiento, y la concavidad.

a) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 2$

b) $f(x) = x^3 - 27x + 46$

c) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

d) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

e) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

f) $f(x) = \frac{-2x}{x^2-1}$

g) $f(x) = e^{-x^2}$

h) $f(x) = \frac{9}{x^2-9}$

i) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$

16 Los gráficos del esquema representan $h'(x)$ y $h''(x)$.

a) Indiquen los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $h(x)$.

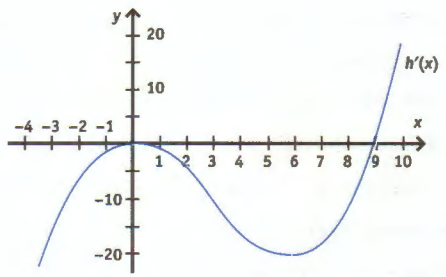
.....

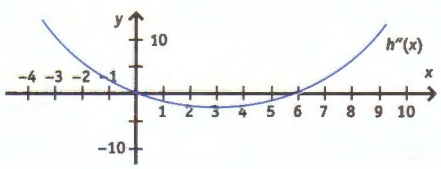
b) Averigüen, si existen, las abscisas de los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión de $h(x)$.

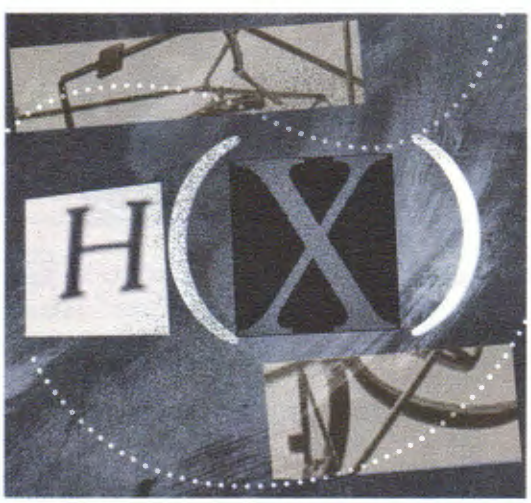
.....

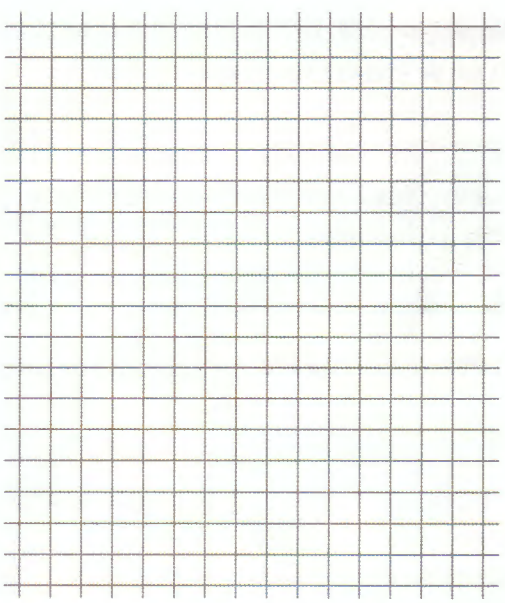
c) Realicen un bosquejo de la gráfica aproximada de $h(x)$, de acuerdo con los datos.

.....









© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Problemas de optimización

Para observar

Llamamos *problemas de optimización* a aquellos en los cuales la cuestión planteada se relaciona con un máximo o con un mínimo de alguna variable.

Cuando es posible expresar mediante una función la variable que se va a optimizar, la derivada resulta de suma utilidad, ya que es la herramienta que nos permite, en muchos casos, encontrar analíticamente los extremos de la función considerada.

Ejemplo:

Consideren todos los pares de números positivos cuya suma es 16. ¿Para cuáles de esos números la suma de sus cuadrados es mínima?

Llamamos x e y a los dos números. La suma a minimizar es $\longrightarrow$ $S = x^2 + y^2$ (I)

Sabemos que $\longrightarrow$ $x + y = 16$ (II)

Despejamos y en (II) $\longrightarrow$ $y = 16 - x$

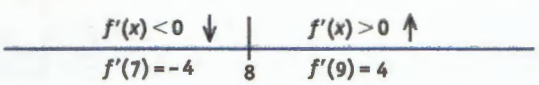
Sustituimos y en (I) $\longrightarrow$ $S = x^2 + (16 - x)^2$ (III)

A la expresión (III) podemos considerarla la fórmula de una función $S(x)$ y buscar su mínimo $\longrightarrow$ $S(x) = x^2 + (16 - x)^2$ (III)

Derivamos $S(x)$ $\longrightarrow$ $S'(x) = 2x + 2 \,.\, (16 - x) \,.\, (-1)$

Igualamos S' a 0 para buscar los puntos críticos $\longrightarrow$ $4x - 32 = 0 \Rightarrow x = 8$

Verificamos que el valor encontrado es un mínimo:



Reemplazamos el valor de x encontrado en (II) $\longrightarrow$ $8 + y = 16 \Rightarrow y = 8$

El par de números buscados es $x = 8$ e $y = 8$.

17 La suma de los cuadrados de dos números positivos es 242. ¿Cuáles son esos números para que su suma sea máxima?

.....

18 Hallen un par de números cuyo producto sea 50 y su suma sea mínima.

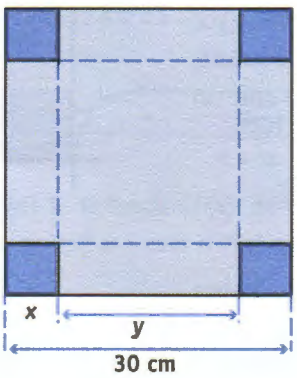
.....

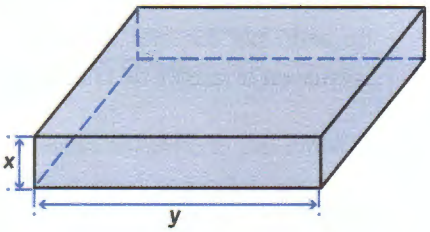
19 Hallen un número tal que el triple de su cuadrado más la razón entre 48 y ese número sea mínimo.

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

20 Con un cartón cuadrado de 30 cm de lado se construye una caja sin tapa quitando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes.
Completen el procedimiento que les permitirá hallar las medidas de la caja de mayor volumen que puede construirse.





a) La fórmula que representa el volumen de la caja es V = ...

b) El lado de la base de la caja en función del lado del cuadrado que se recorta queda expresado por la fórmula y = ...

c) Sustituyendo y en V se obtiene $V(x)$ = ...

d) $V'(x)$ = ...

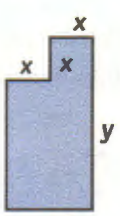
e) Si $V'(x) = 0$, entonces, x = ...

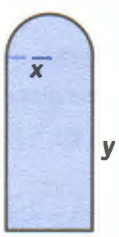
f) Los puntos críticos son .....

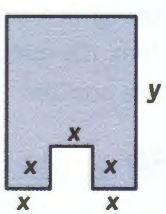
g) Verificando los intervalos de crecimiento, la función tiene un máximo en x = ...

h) Las dimensiones encontradas para la caja del problema son .....

21 Hallen, aproximadamente, el área máxima de cada figura, sabiendo que el perímetro de cada una es 80 cm.

a) 

b) 

c) 

22 Se quiere cercar un terreno rectangular de 800 m² de superficie dividiéndolo en tres partes iguales, con cercas paralelas a los lados.

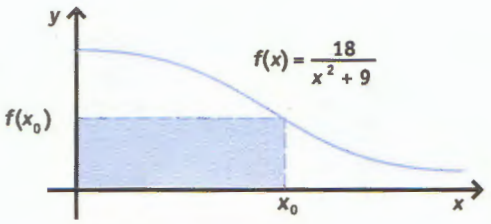
a) Determinen las medidas del terreno que requiera la menor cantidad de cerca.

b) Calculen la cantidad de metros de cerca necesarios.

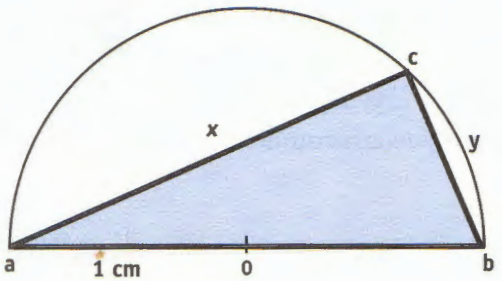
23 ¿La recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 2x^3 + 2x$ en $x = -1$ vuelve a tener contacto con la curva? ¿En qué puntos?

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

24 Hallen las medidas del rectángulo de mayor área que puede dibujarse en el primer cuadrante, limitado por los ejes de coordenadas y con un vértice en la gráfica de la función $f(x) = \frac{18}{x^2+9}$.



25 Hallen el perímetro del triángulo de mayor área inscripto en una semicircunferencia de radio 1 cm. Tengan en cuenta que todo triángulo inscripto en una semicircunferencia es rectángulo y su hipotenusa es el diámetro de la semicircunferencia.



26 Las funciones de costo total C y demanda q (donde p es el precio por unidad) de una empresa están dadas por $C = \frac{1}{3}q^3 - 7q^2 + 111q + 50$ y $q = 100 - p$.

a) Expresen la función de ingreso total I en función de q. ($I = q \cdot p$).

b) Hallen la función de beneficio total B en función de q. ($B = I - C$).

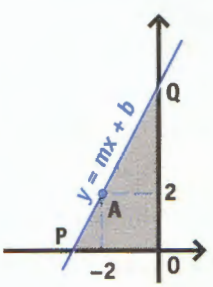
c) Averigüen el nivel de producción q que maximiza el beneficio.

d) Encuentren el máximo beneficio.

27 Un granjero puede vender ahora 12 toneladas de un producto, con un beneficio de $180 por tonelada, pero si espera puede vender 4 toneladas más por semana, y su beneficio se reduce en $15 por tonelada y por semana.
¿Cuánto tiempo tiene que aguardar para que el beneficio sea máximo?

28 Se va a cortar un pedazo de 330 cm de alambre para formar un cuadrado y un triángulo equilátero. ¿De qué longitud debe ser cada parte para que el área total encerrada por las figuras sea la máxima posible?

29 En la figura, la recta $y = mx + b$ pasa por A = (–2; 2), determinando el triángulo $P\hat{Q}O$. Hallen los valores de m y b que hacen que el área del triángulo sea la máxima.



30 Averigüen cuál es el rectángulo de mayor área inscripto en un triángulo isósceles de 6 cm de base y 10 cm de altura.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

El concepto de primitiva

Para leer y recordar

- Si $f(x)$ es una función con dominio D, la función $F(x)$, definida en el mismo dominio, es una *primitiva* o *antiderivada* o *integral indefinida* de $f(x)$ si y solo si $F(x)$ es derivable en D y $f(x)$ es su derivada.

Simbólicamente, lo escribimos así:

$F(x)$ es una primitiva de $f(x)$: $\int f(x) = F(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

- Cada función tiene infinitas primitivas, pues si $F(x)$ es primitiva de $f(x)$, también lo son todas las funciones de la forma $F(x) + k$, siendo k una constante cualquiera. Por eso, escribimos:

$$\int f(x) = F(x) + k$$

Primitivas de funciones elementales

$f(x)$	$x^n (n \neq 1)$	$\frac{1}{x}$	$\cos x$	$\operatorname{sen} x$	e^x	a^x
$F(x) = \int f(x)\,dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\ln x + k$	$\operatorname{sen} x + k$	$-\cos x + k$	$e^x + k$	$\frac{a^x}{\ln a} + k$

Algunas propiedades de las primitivas

$\int k \cdot f(x)dx = k\int f(x)dx \qquad \int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Ejemplo :

La primitiva de $f(x) = x^3$ es $F(x) = \frac{x^4}{4} + k$, porque $F'(x) = f(x)$, siendo k una constante.

Simbólicamente: $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + k$

31 Expresen en lenguaje coloquial las propiedades enunciadas.

32 Hallen las siguientes primitivas:

a) $\int x^5\,dx$

b) $\int \frac{3}{x^4}\,dx$

c) $\int (x+3)^2\,dx$

d) $\int (\sqrt{x} - x^{-1} + \cos x)\,dx$

e) $\int m^3 x^7\,dx$

f) $\int m^3 x^7\,dm$

33 Encuentren las primitivas pedidas sujetas a las condiciones dadas.

a) $\int \ln 0{,}4 \cdot \frac{2^x}{5^x}\,dx$ si $F(1) = \frac{7}{5}$

b) $\int (e^x - \operatorname{sen} x)\,dx$ si $F(0) = 0$

c) $\int \frac{x^3 - 1}{x - 1}\,dx$ si $F(2) = 6$

34 Verifiquen que $\int \ln x dx = x \cdot \ln x - x + k$.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

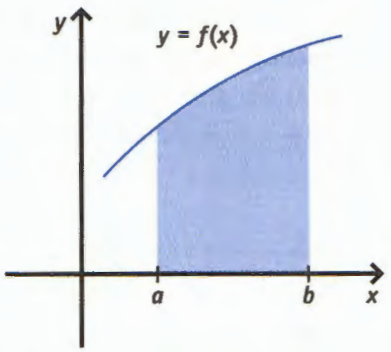
La integral definida y el cálculo de áreas. Regla de Barrow

Para observar

- El área comprendida entre la gráfica de la función f, las rectas verticales de ecuaciones $x = a$ y $x = b$, y el eje x puede expresarse simbólicamente mediante la *integral definida*, así:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

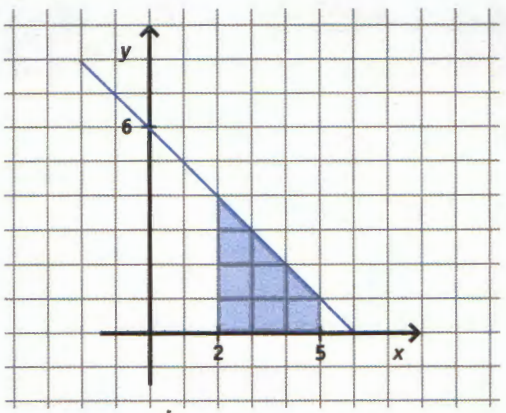
Los valores a y b son los *límites de integración*.



- Para calcular la integral definida, es útil aplicar la siguiente regla práctica, llamada *Regla de Barrow*:

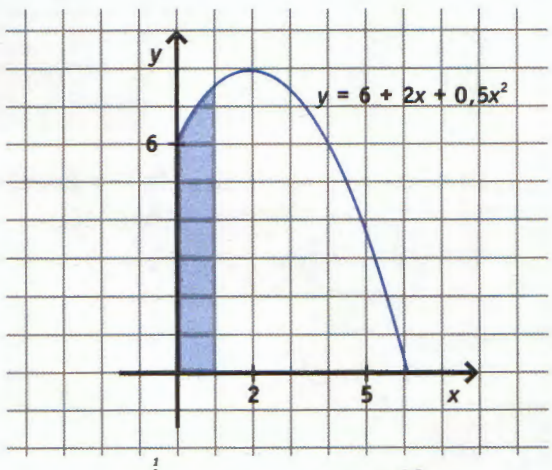
Si $F'(x) = f(x)$ $\quad\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Ejemplos:



$\int_2^5 (6 - x)\,dx = 7{,}5$

Es el área de un trapecio.

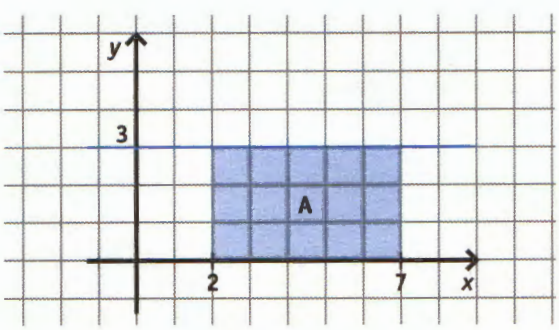


$\int_0^1 (6 + 2x + 0{,}5x^2)\,dx = \frac{43}{6}$

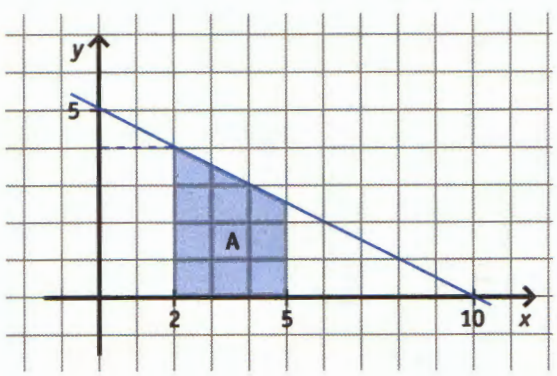
Es el área sombreada.

35 Calculen cada una de las siguientes áreas con dos procedimientos diferentes (por medio de cálculos geométricos y del cálculo de la integral definida), y verifiquen, en cada caso, que obtienen el mismo resultado.

a)



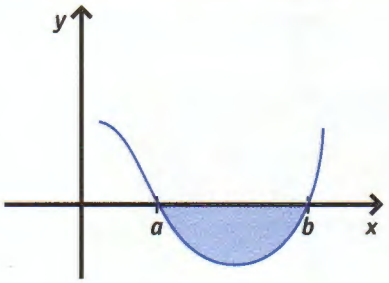
b)



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

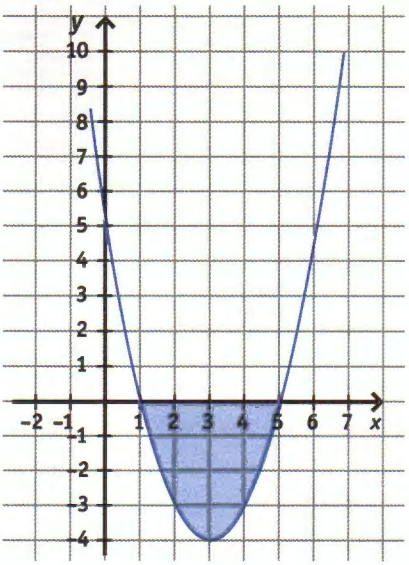
Para observar

- Cuando una región se encuentra "por debajo del eje x", la integral definida asociada al cálculo de su área resulta negativa.
- Para calcular el área de la región, se toma el valor absoluto de la integral definida.



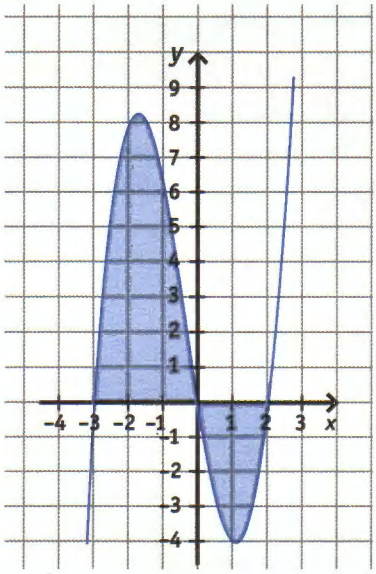
36 Calculen las áreas de las regiones sombreadas en cada uno de los siguientes gráficos.

a)



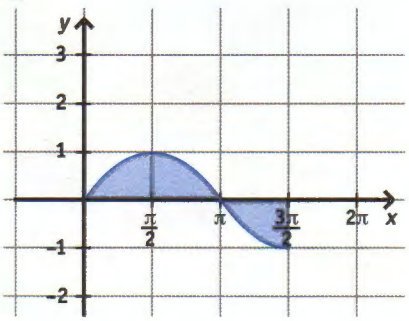
$f(x) = (x - 3)^2 - 4$

b)



$f(x) = x^3 + x^2 - 6x$

c)



37 Observen el gráfico de la derecha.

a) El área de la región sombreada puede calcularse mediante la resta de dos integrales definidas. Indiquen cuáles son.

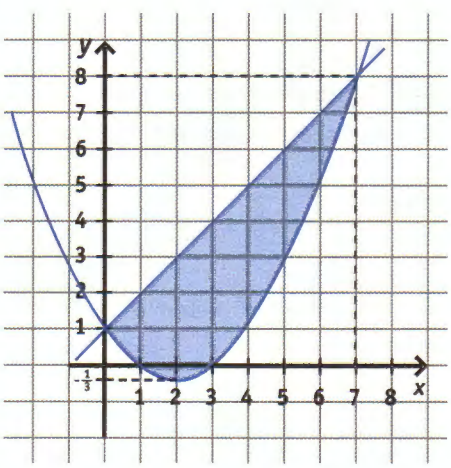
.....

.....

b) Calculen el área de la región sombreada.

.....

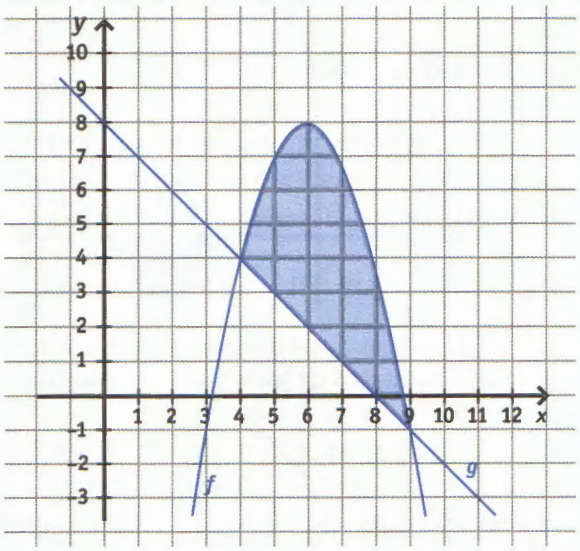
.....



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

38 Calculen el área de la región sombreada en cada gráfico.

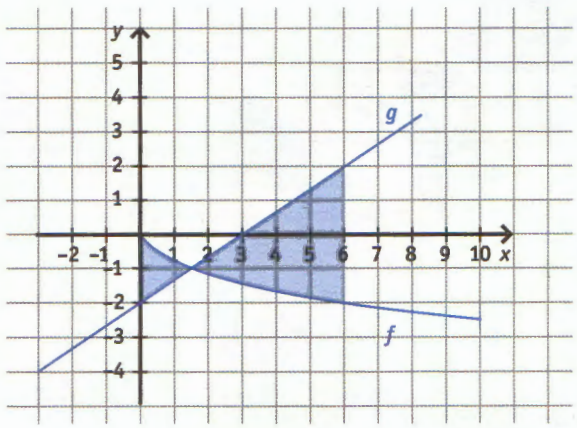
a)



.....

.....

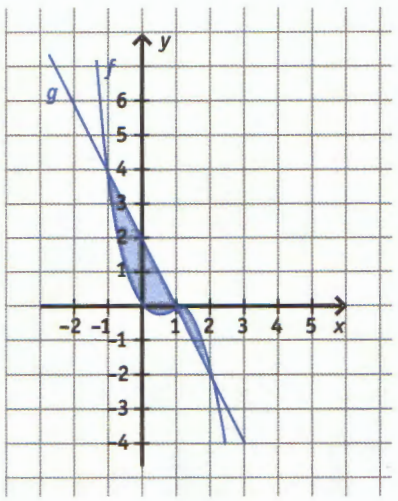
b)



.....

.....

c)



.....

.....

39 Representen en un gráfico cada uno de los siguientes sistemas de inecuaciones y calculen el área de la región que representa el conjunto solución, en cada caso.

a) $\begin{cases} y \leq -\frac{3}{2}x - 2 \\ y \geq \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6 \end{cases}$

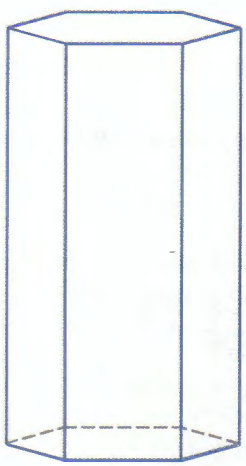
b) $\begin{cases} y \leq (x-2)^2 + 1 \\ y \geq -(x-2)^2 - 1 \\ x \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

La producción más adecuada

Las abejas son un ejemplo de optimización para construir las celdas donde almacenan la miel.
La sección transversal de un panal está constituida por hexágonos regulares cuyo lado varía de acuerdo con la especie. Cada celda es un prisma recto y las capas de las celdas obreras, que son la mayoría y es donde se guarda la miel y el polen, son opacas y planas.
El lado de un hexágono regular de un panal construido por la abeja oriental, que habita en el sur de la India, es de 4,4 mm; las especies africanas de la abeja occidental construyen panales con celdas de 4,9 mm de lado, y las especies europeas comunes generan celdas de 5,6 mm de lado. Estas medidas surgen de las características propias de cada especie. En su trabajo permanente, las obreras de la colmena hacen construcción minimizando la superficie de las paredes de cera sin que se altere el volumen de miel establecida.

40 Una celda tiene capacidad para almacenar 529,42 mm^3 de miel.



a) Averigüen la medida del lado del hexágono para que la superficie cubierta con cera, cerrada en las dos bases, sea mínima.

.....

.....

.....

.....

b) Identifiquen a qué grupo de abejas corresponde el dato hallado.

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

La velocidad que menos perjudica

Un problema muy importante en la administración de empresas es la reducción de costos. Cada empresa, según el tipo de producción o servicio que realiza, adopta distintos métodos para el cálculo de sus costos.

Las empresas de transportes tienen especialistas que se encargan de planificar los circuitos de distribución para optimizar los costos. Si bien no siempre la solución a los problemas de optimización de costos de transporte está vinculada a modelos funcionales, en los casos en que se puede hallar una fórmula que exprese los costos en función de otra variable es posible minimizar los costos utilizando las herramientas del análisis de funciones que nos provee la derivada.

41 Un camión tiene una carga muy frágil que transportar en una ruta llana y sin peaje a velocidad constante de x km/h. Para este tipo de cargas se sabe que existen reglamentaciones que determinan velocidades máximas durante el viaje.

El gasoil cuesta $ 1,50 el litro, el consumo del camión es de $10 + \frac{x^2}{120}$ litros por hora y su recorrido de 500 km.

La expresión $C(x)$, que indica el costo de todo el viaje en función de la velocidad, está dada por la siguiente fórmula:

$$C(x) = t \,.\, p \,.\, g + c$$

(t: tiempo de duración del viaje en horas; p: costo del litro de gasoil en pesos; g: consumo de gasoil en litros; c: pago al conductor en pesos).

a) Determinen cuál tiene que ser la velocidad para que el costo del viaje sea mínimo, si el conductor no cobra por ese viaje.

.....

b) Calculen el mínimo costo.

.....

c) Determinen cuál tiene que ser la velocidad para que el costo del viaje sea mínimo, si el conductor cobra $50 la hora.

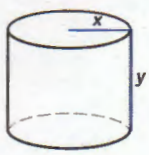
.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

42 Encuentren el punto de la parábola $f(x) = x^2 + x + 3$ que está a menor distancia del punto P = (–1; 4)

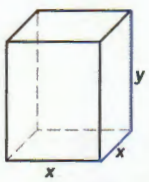
43 Consideren los siguientes cuerpos con los volúmenes indicados y hallen los valores de x e y que minimizan el área total de cada uno.

a)



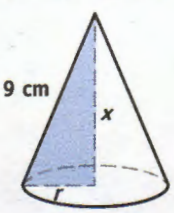
$V = \pi\ m^3$

b)

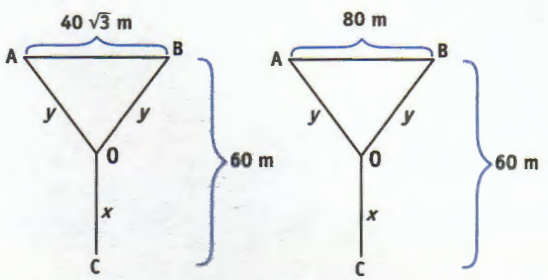


$V = 1\ m^3$

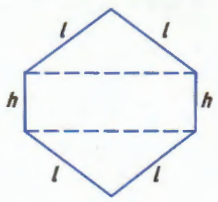
44 Encuentren el volumen exacto del cono de mayor capacidad que puede generarse al hacer girar un triángulo rectángulo de 9 cm de hipotenusa alrededor de uno de sus catetos.



45 Los esquemas representan a tres motociclistas que parten en el mismo momento y a la misma velocidad desde A, B y C, por caminos rectos hasta llegar a O. Sabiendo que la suma de los tres trayectos es mínima, averigüen si en alguno de los casos gana la carrera el motociclista C.



46 Se quiere armar un hexágono de 60 cm de perímetro con un rectángulo y dos triángulos isósceles. La base de cada triángulo es 1,5 veces la longitud de cada uno de los otros dos lados. Hallen las medidas aproximadas de l y h para que el área del hexágono sea la máxima posible.



47 Representen gráficamente la región encerrada por las siguientes expresiones y calculen su área.

a)

$$\begin{cases} y \le -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 4 \\ y \ge 3x^2 - 5x + 2 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} y \ge \frac{1}{4}(x-2)^2 - 4 \\ y \le 3x + 6 \\ y \le -x + 6 \end{cases}$$

48 Hallen el área de la región encerrada entre las gráficas de $f(x) = \ln x + 3$, su recta tangente en $x = e$, y las rectas verticales de ecuaciones $x = 1$ y $x = 5$.

49 Consideren las siguientes funciones:

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ y $g(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$.

Calculen el área de la región encerrada entre las gráficas de ambas funciones y las rectas verticales de ecuaciones $x = \frac{1}{2}$ y $x = 3$.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

AUTOEVALUACIÓN

Marquen la opción correcta.

1 El volumen de un cilindro es $\frac{\pi}{4}$ m³. Su área total es mínima cuando el radio de la base mide

- a) 0,5 m
- b) 0,8 m
- c) 0,4 m
- d) 0,6 m

2 La función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 10$

- a) tiene un mínimo en $x = -3$ y un máximo en $x = 1$.
- b) tiene un máximo en $x = -3$ y un mínimo en $x = 1$.
- c) tiene un máximo en $x = -3$ y otro en $x = 1$.
- d) no tiene extremos.

3 Si $f(x) = e^{-x^2+4x}$, entonces, $f''(0)$ es igual a

- a) 12
- b) 14
- c) 16
- d) 18

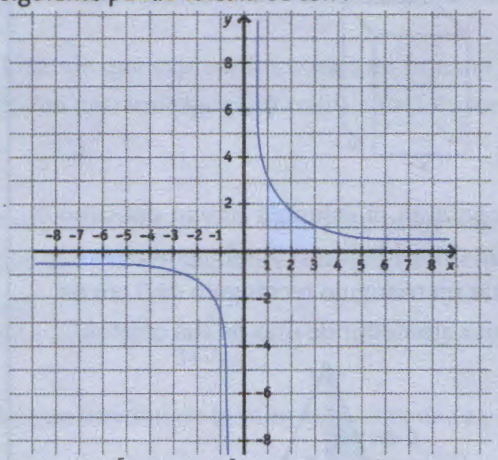
4 Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 2$ y $h(x) = x + 3$, $(f \circ h)$ tiene

- a) un máximo en x = −3.
- b) un punto de inflexión en x = −3.
- c) una recta tangente horizontal en x = −3.
- d) un mínimo en x = 3.

5 Si $\int_0^2 f(x)\,dx = 1$, entonces, $\int_0^2 [3f(x) + 5x^4]dx$ es

- a) un múltiplo de 5 y 7.
- b) un múltiplo de 5 y 3.
- c) un múltiplo de 6 y 7.
- d) un múltiplo de 5 y 6.

6 El área de la región sombreada en el gráfico siguiente puede calcularse con :



- a) $\int_{-7}^{-5} f(x)\,dx + \int_{1}^{3} f(x)\,dx$
- b) $\left|\int_{-7}^{-5} f(x)\,dx + \int_{1}^{3} f(x)\,dx\right|$
- c) $\left|\int_{-7}^{-5} f(x)\,dx\right| + \int_{1}^{3} f(x)\,dx$
- d) $\int_{-7}^{-5} f(x)\,dx + \left|\int_{1}^{3} f(x)\,dx\right|$

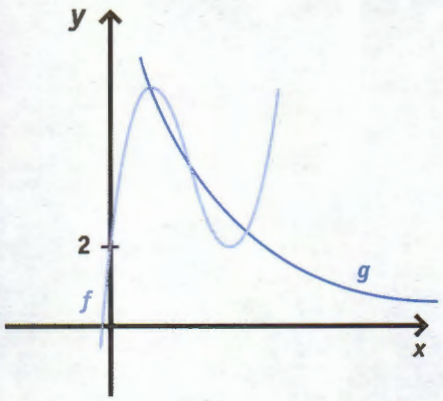
7 La pendiente de la recta tangente a una función F(x) en cualquier punto es $m = 6x + 5$. Si el punto (−1; 9) pertenece a $F(x)$, entonces:

- a) $F(x) = 3x^2 + 5x + 7$
- b) $F(x) = 3x^2 + 5x - 7$
- c) $F(x) = 3x^2 + 5x - 11$
- d) $F(x) = 3x^2 + 5x + 11$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

ACTIVIDADES INTEGRADORAS

En el siguiente par de ejes cartesianos se han representado la función polinómica de fórmula $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ y una función exponencial g.



1 Hallen la fórmula de g si dos puntos que pertenecen a su gráfica son el máximo local de f y el punto (2; 4).

.....

.....

2 Escriban la ecuación de la asintota horizontal de g.

.....

3 Verifiquen si $x = 1$ y $x = 2$ son abscisas de dos puntos de intersección de ambas gráficas.

.....

4 Calculen la pendiente de la recta tangente a cada una de las curvas en el punto de inflexión de f.

.....

5 Escriban una expresión que permita calcular el área que queda determinada entre ambas curvas y los extremos locales de f.

.....

6 Marquen el área en el gráfico y hállenla.

.....

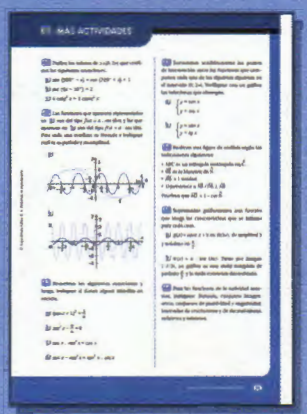
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Cómo son estos cuadernillos

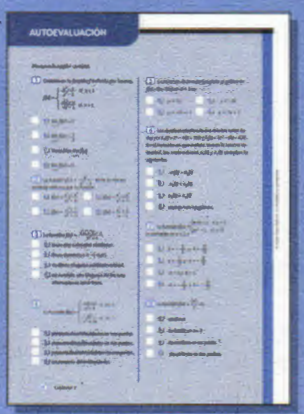
Apertura
Una situación disparadora es el eje que abre cada capítulo.

Revisión inicial
Incluye actividades para repasar los conocimientos previos.

En el mundo real
Trata ejemplos con datos concretos, vinculados a aplicaciones a otras disciplinas y a situaciones cotidianas.

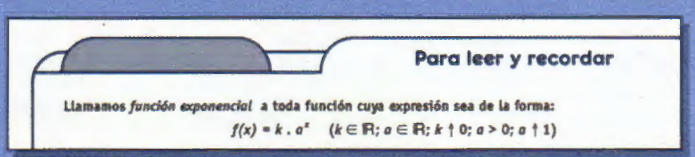


Más actividades
Contiene una serie adicional de ejercitaciones diversas de todos los temas desarrollados en el capítulo.

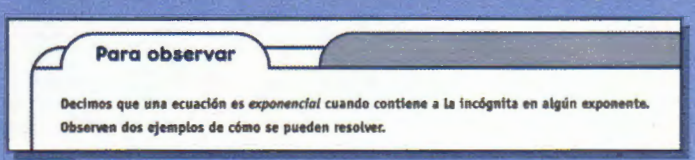


Autoevaluación
Se propone una combinación de actividades que servirá a modo de evaluación de los contenidos tratados en el capítulo.

Actividades integradoras
Al final de los cuadernillos 2, 4 y 6, se presenta una sección con propuestas destinadas a interrelacionar los contenidos de los cuadernillos anteriores.



Los recuadros identificados con la leyenda **Para leer y recordar** contienen información necesaria para la resolución de las actividades (conceptos, fórmulas, definiciones).



Los recuadros identificados con la leyenda **Para observar** contienen ejemplos explicados.

12 — Un número con fondo de color indica que la actividad es de mayor complejidad.

AIQUE